CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2024/25 - Esercitazione 2024-11-21

Problema 1

Un'urna contiene una frazione $p \in (0,1)$ di palline rosse, e le rimanenti blu. Si effettuano estrazioni con rimpiazzo finché si non osservano, nella sequenza delle palline estratte, due palline di colore diverso. Si pone $T \in \{2,3,\ldots\}$ il numero di estrazioni effettuate.

1. Al variare del parametro p, determinare la densità discreta di T.
2. Al variare del parametro p, calcolare il valore atteso di T *(Suggerimento: ricordare il valore atteso di una variabile geometrica)*
3. Fornire una stima di massima verosimiglianza per p supponendo di aver osservato $T = 2$. Cosa cambia se invece si osserva $T = 3$?

Una soluzione:

1. Calcoliamo la probabilità che $T = k$ al variare di $k \in \{2,3,4,\ldots\}$. Posta $X_1 \in \{R, B\}$, possiamo decomporre

$$P(T = k) = P(T = k|X_1 = R)P(X_1 = R) + P(T = k|X_1 = B)P(X_1 = B)$$

Chiaramente $P(X_1 = R) = p$, $P(X_1 = B) = (1-p)$. Sapendo $X_1 = R$, avremo $T = k$ nel caso in cui si estraggano (dopo la prima rossa) ulteriori $k-2$ palline rosse e infine una blu, quindi ricordando la probabilità di una specifica sequenza nel caso delle estrazioni con rimpiazzo abbiamo

$$P(T = k|X_1 = R) = p^{k-2}(1-p).$$

Equivalentemente, abbiamo che, sapendo $X_1 = R$, la variabile $T-2$ ha densità geometrica di parametro $1-p$. Analogamente, $P(T = K|X_1 = B) = (1-p)^{k-2}p$, quindi la densità discreta di T è

$$P(T = k) = p^{k-1}(1-p) + (1-p)^{k-1}p \quad \text{per } k = 2,3,\ldots$$

2. Dobbiamo calcolare il valore atteso

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{k=2}^{\infty} kP(T = k) = \sum_{k=2}^{\infty} k\left[p^{k-1}(1-p) + (1-p)^{k-1}p\right].$$

Il suggerimento è di ricordare che per una variabile geometrica di parametro q vale

$$\mathbb{E}[\mathrm{Geom}(q)] = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-q)^k q = (1-q)/q.$$

In effetti spezzando in due serie si trova

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{k=2}^{\infty} kp^{k-1}(1-p) + \sum_{k=2}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p.$$

e quindi si potrebbe procedere algebricamente nel calcolo. Tuttavia, volendo procedere in modo più probabilistico, per quanto detto sopra, abbiamo visto che $T-2$ è, condizionatamente a sapere

$X_1 = R$, una variabile geometrica di parametro $1-p$, mentre condizionatamente a $X_1 = B$ lo è di parametro p. Pertanto abbiamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T] &= \mathbb{E}[T-2] + 2 = \mathbb{E}[T-2|X_1 = R]\, p + \mathbb{E}[T-2|X_1 = B]\,(1-p) + 2 \\ &= \frac{p^2}{1-p} + \frac{(1-p)^2}{p} + 2\end{aligned}$$

3. La verosimiglianza è $L(p; T = k) = P(T = k|p) = [p^{k-2} + (1-p)^{k-2}]p(1-p)$. Chiaramente vediamo che l'espressione è nulla per $p \in \{0, 1\}$ e non cambia se scambiamo p con $1-p$, quindi $p = 1/2$ è un punto in cui si annulla la derivata. Derivando rispetto a p otteniamo

$$L'(p) = (k-2)(p^{k-3} - (1-p)^{k-3})p(1-p) + [p^{k-2} + (1-p)^{k-2}](1-2p)$$

Per $k = 2$ otteniamo $L'(p) = 2(1-2p)$ che si annulla solo in $p = 1/2$, che quindi è la stima di massima verosimiglianza. Per $k = 3$, troviamo ancora

$$L'(p) = 1 - 2p,$$

quindi $p = 1/2$ è ancora la stima di massima verosimiglianza.

Problema 2

Siano X_1, X_2 variabili aleatorie continue con densità uniforme sull'intervallo $[0, 1]$ e tra di loro indipendenti.

1. Calcolare la densità della variabile $Y = \sqrt{X_1}$.
2. Calcolare la densità della variabile $Z = \max\{X_1, X_2\}$ (ossia la più grande tra le due variabili X_1, X_2) *(Suggerimento: calcolare* CDF_Z*)*
3. Mostrare che le due variabili Y, Z hanno la stessa legge, ma non sono indipendenti.

Una soluzione:

1. Possiamo usare la formula di cambio di variabile con $g(x) = \sqrt{x}$ invertibile nell'intervallo $(0, 1)$ (con immagine $g(x) \in (0, 1)$) e inversa $g^{-1}(y) = y^2$ e derivata $g'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$. Pertanto $g'(g^{-1}(y) = 1/(2(y^2)^{1/2}) = 1/(2y)$ e troviamo

$$p(Y = y) = p(X = y^2)\frac{1}{g'(g^{-1}(y))} = 2y, \quad \text{per } y \in (0, 1),$$

(poniamo $p(Y = y) = 0$ per $y \notin (0, 1)$).

2. Per la variabile Z seguiamo il suggerimento:

$$\mathrm{CDF}_Z(t) = P(Z \leq t) = P(\max\{X_1, X_2\} \leq t) = P(X_1 \leq t, X_2 \leq t) = P(X_1 \leq t)P(X_2 \leq t)$$

avendo usato l'indipendenza tra le due variabili X_1, X_2. Per $t \in (0, 1)$ (i valori rilevanti essendo X_1, X_2 a valori in $(0, 1)$, quindi pure Z lo sarà), abbiamo $P(X_1 \leq t) = P(X_2 \leq t) = t$, quindi

$$\mathrm{CDF}_Z(t) = t^2$$

derivando rispetto a t, troviamo la densità

$$p(Z = t) = \frac{d}{dt}\,\mathrm{CDF}_Z(t) = 2t.$$

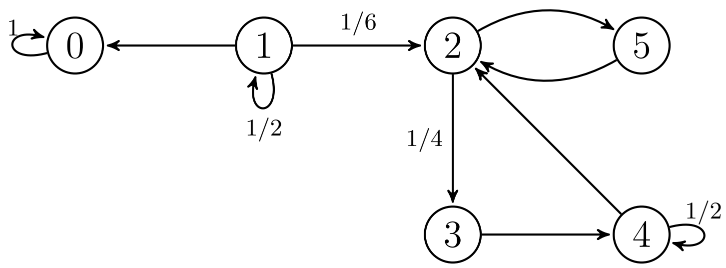
3. Le formule per le densità coincidono, quindi la legge di Y coincide con quella di Z. Però non sono indipendenti, infatti se lo fossero, dovremmo avere ad esempio che

$$P(Z \le 1/2 | Y > 1/4) = P(Z \le 1/2)$$

Però se sappiamo che $Y = \sqrt{X_1} > 1/4$, allora $X_1 > 1/2$ e quindi $Z = \max\{X_1, X_2\} \ge X_1 > 1/2$, quindi $P(Z \le 1/2 | Y > 1/4) = 0$, ma d'altra parte abbiamo calcolato che $P(Z \le 1/2) = \mathrm{CDF}_Z(1/2) = 1/4$.

Problema 3

Si consideri una catena di Markov $(X_n)_n$ con probabilità di transizione rappresentate in figura e tale che $X_0 = 1$.



1. Scrivere la matrice di transizione Q (completare con le probabilità mancanti), classificare gli stati (transitori/ricorrenti) e determinare tutte le distribuzioni invarianti della catena.
2. Avendo osservato che $X_4 = 0$, calcolare il valore atteso di X_2.
3. Calcolare il limite $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 0)$ (spiegare anche perché esiste).

Una soluzione:

1. Scriviamo la matrice ordinando gli stati nell'ordine naturale $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Troviamo

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lo stato 1 è transitorio (infatti si raggiunge 0, da cui 1 non è raggiungibile). Gli altri stati sono ricorrenti. Le classi chiuse irriducibili sono $C_1 = \{0\}$ e $C_2 = \{2, 3, 4, 5\}$ (entrambe regolari per il criterio). Per la classe C_1 la distribuzione invariante è banale $\mu_{C_1} = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$, mentre per calcolare μ_{C_2} impostiamo il bilancio di flusso (negli stati 5, 3, 4):

$$\mu_5 = \frac{3}{4}\mu_2 \quad \mu_3 = \frac{1}{4}\mu_2, \quad \frac{1}{2}\mu_4 = \mu_3.$$

Troviamo quindi posto $t = \mu_2$

$$\mu_{C_2} = (0, 0, t, \frac{t}{4}, \frac{t}{2}, \frac{3t}{4}),$$

da cui $t = 2/5$ (avendo imposto che la somma delle componenti sia 1). Tutte le distribuzioni invarianti sono quindi della forma

$$\mu(\alpha) = (1 - \alpha)\mu_{C_1} + \alpha\mu_{C_2} = \left(1 - \alpha, 0, \frac{2\alpha}{5}, \frac{\alpha}{10}, \frac{1\alpha}{5}, \frac{3\alpha}{10}\right)$$

al variare di $\alpha \in [0, 1]$.

2. Per calcolare il valore atteso

$$\mathbb{E}[X_2|X_4 = 0] = \sum_{k=0}^{5} kP(X_2 = k|X_4 = 0)$$

dobbiamo calcolare la densità discreta $P(X_2 = k|X_4 = 0)$. Tuttavia notiamo subito che, dovendo essere $X_4 = 0$ abbiamo soltanto due possibilità per X_2: o $X_2 = 1$ oppure $X_2 = 0$, altrimenti se fosse $X_2 \in C_2$ certamente non accade che $X_4 = 0$. Quindi il valore atteso si riduce a calcolare

$$\mathbb{E}[X_2|X_4 = 0] = P(X_2 = 1|X_4 = 0)$$

Usando la formula di Kolmogorov troviamo quindi

$$P(X_2 = 1|X_4 = 0) = \frac{P(X_2 = 1, X_4 = 0)}{P(X_4 = 0)}$$

Calcoliamo quindi i pesi dei cammini che realizzano i due eventi (ricordiamo che $X_0 = 1$):

$$P(1 \to 1 \to 1 \to 1 \to 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$$
$$P(1 \to 1 \to 1 \to 0 \to 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1$$

da cui $P(X_2 = 1, X_4 = 0) = \frac{1}{8}$, mentre per calcolare $P(X_4 = 0)$ dobbiamo aggiungere i cammini

$$P(1 \to 1 \to 0 \to 0 \to 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1$$
$$P(1 \to 0 \to 0 \to 0 \to 0) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

da cui $P(X_4 = 0) = \frac{5}{8}$ e si conclude che

$$\mathbb{E}[X_2|X_4 = 0] = \frac{1}{5}.$$

3. Il limite esiste perché ogni classe chiusa irriducibile è regolare. Usando la notazione delle lezioni, basterà impostare delle equazioni dall'identità $Q^\infty = QQ^\infty$. In particolare troviamo

$$Q^\infty_{10} = Q_{10}Q^\infty_{00} + Q_{11}Q^\infty_{10} + Q_{12}Q^\infty_{20}$$

ma $Q^\infty_{00} = 1$, mentre $Q^\infty_{20} = 0$, quindi

$$Q^\infty_{10} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}Q^\infty_{10}$$

da cui $Q^\infty_{10} = 2/3$. Si può anche argomentare nel seguente modo (ricordando la descrizione dei tempi di permanenza negli stati e le probabilità di salto): siccome la catena parte da 1, e l'unico modo in cui può raggiungere 0 è saltandoci direttamente, avremo che dopo un tempo di permanenza geometrico in 1, la catena salterà in 0 con probabilità data da $1/3/(1/3+1/6) = 2/3$ per poi restarvi, che è il limite richiesto.